Тәжірибелік сабақ

Тақырып №12. Жоғарғы ретті туынды және дифференциалдар. Лейбниц формуласы. Тейлор формуласы. Лопиталь ережелері.

1. $y = arctg\dfrac{tg\frac{x}{2}+1}{2}$ функцияның туныдысын табыңыз.

Шешуі.

$$y' = (arctg\frac{tg\frac{x}{2}+1}{2})' = \frac{1}{1+\left(\frac{tg\frac{x}{2}+1}{2}\right)^2}\cdot\left(\frac{tg\frac{x}{2}+1}{2}\right)' = \frac{1}{1+\frac{\left(tg\frac{x}{2}+1\right)^2}{4}}\cdot\frac{1}{2}\cdot$$

$$\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{2} = \frac{4}{4+\left(tg\frac{x}{2}+1\right)^2}\cdot\frac{1}{4\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1}{4\cos^2\frac{x}{2}+\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{4\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1}{4\cos^2\frac{x}{2}+1+\sin x} =$$

$$= \frac{1}{2(1+\cos x)+1+\sin x} = \frac{1}{\sin x+2\cos x+3}$$

Жауабы: $y' = \dfrac{1}{\sin x+2\cos x+3}$

3. $\begin{cases} x = 2e^t \\ y = e^{-t} \end{cases}$ параметрлік теңдеумен берілген қисыққа $t=0$ нүктесінде жүргізілген жанама мен нормальдің теңдеулерін жазыңыз.

Шешуі. $y = y_0 + y'(x_0)(x-x_0)$ жанаманың және $y = y_0 - \dfrac{1}{y'(x_0)}(x-x_0)$ нормальдің теңдеулерін жазу үшін қажетті шамаларды анықтаймыз: $x_0 = x(0) = 2e^0 = 2$; $y_0 = y(0) = e^0 = 1$ $\quad y'_x = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y'_t dt}{x'_t dt} = \dfrac{y'_t}{x'_t} = \dfrac{-e^{-t}}{2e^t}$; $\quad y'_x(x_0) = \dfrac{-e^{-0}}{2e^0} = -\dfrac{1}{2}$. Ендеше жанаманың теңдеуі: $y = 1-\dfrac{1}{2}(x-2)$ немесе $y = -\dfrac{1}{2}x+2$. Ал нормальдің теңдеуі: $y = 1+2(x-2)$ немесе $y = 2x-3$.

Жауабы: $y = -\dfrac{1}{2}(x+2)$, $y = 2x-3$

4. $y=\dfrac{\log_3 x}{x^2}$ функциясының y^{IV} туындысын табыңыз.

Шешуі. y^{I}, y^{II}, y^{III}, y^{IV} туындыларын біртіндеп табамыз. Алдымен логарифмдік функцияның қасиеттерін қолданып, ықшамдаймыз.

$$y=\frac{\log_3 x}{x^2}=\frac{\ln x}{x^2\ln 3}$$

$$y^{I}=\frac{1}{\ln 3}\cdot\frac{\frac{1}{x}x^2-2x\ln x}{x^4}=\frac{1}{\ln 3}\cdot\frac{x-2x\ln x}{x^4}=\frac{1}{\ln 3}\cdot\frac{1-2\ln x}{x^3}$$

$$y^{II}=\frac{1}{\ln 3}\cdot\frac{-\frac{2}{x}x^3-3x^2(1-2\ln x)}{x^6}=\frac{1}{\ln 3}\cdot\frac{-2x^2-3x^2+6x^2\ln x}{x^6}=\frac{1}{\ln 3}\cdot\frac{6\ln x-5}{x^4}$$

$$y^{III}=\frac{1}{\ln 3}\cdot\frac{\frac{6}{x}x^4-4x^3(6\ln x-5)}{x^8}=\frac{1}{\ln 3}\cdot\frac{6-24\ln x+20}{x^5}=\frac{1}{\ln 3}\cdot\frac{26-24\ln x}{x^5}$$

$$y^{IV}=\frac{1}{\ln 3}\cdot\frac{-\frac{24}{x}x^5-5x^4(26-24\ln x)}{x^{10}}=\frac{1}{\ln 3}\cdot\frac{-24-130+120\ln x}{x^6}=\frac{1}{\ln 3}\cdot\frac{120\ln x-154}{x^6}$$

Жауабы: $y^{IV}=\dfrac{2(60x-77)}{x^6\ln 3}$.

5. $\begin{cases}x=\ln t\\ y=arctgt\end{cases}$ параметрлік теңдеумен берілген функцияның y_{xx}^{II} туындысын табыңыз.

Шешуі. Алдымен $y_x^{/}=\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{(arctgt)^{/}dt}{(\ln t)^{/}dt}=\dfrac{\frac{1}{1+t^2}}{\frac{1}{t}}=\dfrac{t}{t^2+1}$ туындысын есептеп, сонан соң y_{xx}^{II} туындысын алу ережесін қолданып,

$$y_{xx}^{II}=\left(y_x^{/}\right)_x^{/}=\frac{dy_x^{/}}{dx}=\frac{\left(\frac{t}{t^2+1}\right)^{/}dt}{\frac{1}{t}dt}=t\cdot\frac{\left(t^2+1\right)-t\cdot 2t}{\left(t^2+1\right)^2}=t\frac{t^2+1-2t^2}{\left(t^2+1\right)^2}=t\frac{1-t^2}{\left(t^2+1\right)^2}=\frac{t-t^3}{\left(t^2+1\right)^2}$$

анықтаймыз.

Жауабы: $y_{xx}^{II}=\dfrac{t-t^3}{\left(t^2+1\right)^2}$

6.Келесі есептерді өз беттеріңмен шығарыңдар

1. Айқын емес y функциясының туындысын тап:

а) $e^{xy}-x^3-y^3=3$; б) $xy-arctg\dfrac{x}{y}=3$; в) $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=a$.

(Ответ: а) $y'=\left(3x^2-\ell^{xy}y\right)/\left(-3y^2+\ell^{xy}x\right)$; б) $y'=-\left(x^2y+y^3-y\right)/\left(x^3+xy^2+x\right)$; в) $y=-\sqrt[3]{\left(y/x\right)^2}$.)

2. Параметрлік теңдеумен берілген функцияның екінші туындысын тап:

а) $y = t^3 + t^2 - 1,$ б) $y = 2\sin^3 t,$

$x = t^3 + t + 1;$ $x = 2\cos^3 t.$

3. $x^4 - xy + y^4 - 1 = 0$ теңдеуімен берілген $M(0,1)$ нүктесіндегі y функциясының екінші туындысының мәнін тап. (Жауабы: -1/16.)

4. $x = \dfrac{1+t}{t^3}$, $y = \dfrac{3}{2t^2} + \dfrac{1}{2t}$ қисығына $M_0(2,2)$ нүктесінде жүргізілген жүргізілген жанама мен нормальдің теңдеуін жаз. (Жауабы: $7x - 10y + 6 = 0$, $10x + 7y - 34 = 0$.)

5. $y = x^3 \ln x$ функциясының бірінші, екінші және үшінші ретті дифференциалдарын тап.

6. $y = (x^2 + 1)arctgx$ функциясының бірінші және екінші ретті дифференциалдарын тап;